3.3 La preuve du Théorème de Cauchy-Goursat

On rappelle l'énoncé 2.2.1

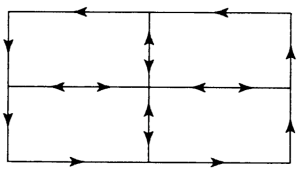
3.3.1 Théorème (Théorème de Cauchy-Goursat)
Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Soit γ un lacet tel que $Int(\gamma) \subset \Omega$. Alors $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Le plan de la démonstration est curieusement indirect :
$1^{\text{ère}}$ **étape :** On montre le théorème dans le cas particulier où γ est le bord d'un rectangle contenu dans Ω.
2^{eme} **étape :** On montre que ce cas particulier suffit pour construire une primitive locale c-à-d dans un disque contenu dans Ω et d'obtenir grâce au théorème 2.1.28 la version locale c-à-d dans le cas particulier où le domaine Ω est un disque (en particulier si $\Omega = \mathbb{C}$).
3^{eme} **étape :** On utilise la version locale pour démontrer le théorème en général.

$1^{\text{ère}}$ étape :

3.3.2 Lemme (Théorème de Goursat)
Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω. Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ contenu dans Ω dont la frontière ∂R est orientée positivement. Alors $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$.

Démonstration: Soit P le périmètre de R et Δ la longueur de sa diagonale. On divise R en 4 rectangles égaux $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}$ et $R^{(4)}$.



Si chaque rectangle est orienté positivement, alors la simplification le long des côtés communs donne

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \int_{\partial R^{(1)}} f(z)\,dz + \int_{\partial R^{(2)}} f(z)\,dz + \int_{\partial R^{(3)}} f(z)\,dz + \int_{\partial R^{(4)}} f(z)\,dz \tag{3.4}$$

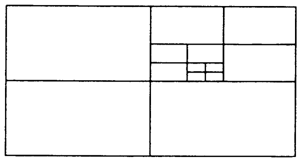
Comme

$$\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leq \left|\int_{\partial R^{(1)}} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial R^{(2)}} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial R^{(3)}} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{\partial R^{(4)}} f(z)\,dz\right| \tag{3.5}$$

pour au moins un des rectangles on doit avoir $\frac{1}{4}\left|\int_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leq \left|\int_{\partial R^{(k)}} f(z)\,dz\right|$.

On appellera ce rectangle R_1.

Maintenant on itérant ce processus, on construit une suite $R_1 \supset R_2 \supset \cdots$ de rectangles telle que



(i) $\left| \int_{\partial R_n} f(z)\, dz \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_{n-1}} f(z)\, dz \right| \geq \cdots \geq \frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R} f(z)\, dz \right|$

(ii) Perimetre(R_n)=$\frac{1}{2^n}$Perimetre$(R) = \frac{P}{2^n}$

(iii) Diagonale(R_n)=$\frac{1}{2^n}$Diagonale$(R) = \frac{\Delta}{2^n}$

Comme ces rectangles sont emboîtés et que la longueur de leurs diagonales tend vers 0, ils doivent converger vers un point unique w_0. Plus précisément, soit z_n le coin supérieur gauche de R_n. Si $m > n$, alors $|z_n - z_m| \leq$ Diagonale$(R_n) = \frac{\Delta}{2^n}$ et donc $\{z_n\}$ est une suite de Cauchy qui doit converger vers un point w_0. Si z est un point quelconque du rectangle R_n, comme tous les points z_k, $k \geq n$, sont dans R_n, la distance de z à w_0 est inférieure à la longeur de la diagonale de R_n, i.e. $|z - w_0| \leq \frac{\Delta}{2^n}$ pour tout $z \in R_n$. De (i) on a $\left| \int_{\partial R} f(z)\, dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial R_n} f(z)\, dz \right|$. Pour obtenir une meilleure estimation on utilise la dérivabilité de f au point w_0. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$\left| \dfrac{f(z) - f(w_0)}{z - w_0} - f'(w_0) \right| < \epsilon$ chaque fois que $|z - w_0| < \delta$.

Si on choisit n assez grand tel que $\frac{\Delta}{2^n} < \delta$, alors

$$|f(z) - f(w_0) - (z - w_0) f'(w_0)| < \epsilon |z - w_0| \leq \epsilon \frac{\Delta}{2^n} \tag{3.6}$$

pour tout point $z \in R_n$. D'autre part, d'après le Théorème 2.1.28,

$$\int_{\partial R_n} 1\, dz = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_{\partial R_n} (z - w_0)\, dz = 0 \tag{3.7}$$

Car, z est une primitive de 1, $\dfrac{(z - w_0)^2}{2}$ est une primitive de $(z - w_0)$ et R_n est chemin fermé i.e. un lacet. Alors

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\partial R} f(z)\, dz \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial R_n} f(z)\, dz \right| \\
&\leq 4^n \left| \int_{\partial R_n} f(z)\, dz - f(w_0) \int_{\partial R_n} 1\, dz - f'(w_0) \int_{\partial R_n} (z - w_0)\, dz \right| \\
&\leq 4^n \left| \int_{\partial R_n} f(z) - f(w_0) - (z - w_0) f'(w_0)\, dz \right| \\
&\leq 4^n \int_{\partial R_n} \left| f(z) - f(w_0) - (z - w_0) f'(w_0) \right| |dz| \\
&\leq 4^n \left(\frac{\epsilon \Delta}{2^n} \right) \text{Perimetre}(R_n) \epsilon \Delta P
\end{aligned} \tag{3.8}$$

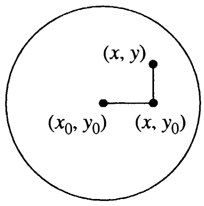
Comme ceci est vrai pour tout $\epsilon > 0$, on doit avoir $\left| \int_{\partial R} f(z)\, dz \right| = 0$ et donc $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$ comme souhaité. ■

2ème étape :

3.3.4 THÉORÈME (THÉORÈME DE CAUCHY-GOURSAT LOCAL)
Soit $D = D(z_0; r_0)$ un disque de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Alors, f admet une primitive dans D.
Par conséquent, pour tout lacet γ de D on a $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

Démonstration: On peut maintenant passer à la seconde étape de la preuve du Théorème de Cauchy-Goursat pour un disque. Comme f est holomorphe dans un disque $D = D(z_0; r_0)$, le resultat qu'on vient d'établir montre que l'intégrale de f est nulle le long de tout rectangle contenu dans D. Ceci est suffisant pour construire une primitive, de la même manière que dans la preuve de 2.1.28.

On va définir la primitive $F(z)$ comme une intégrale de z à z_0. Tout le long de cette preuve on va utiliser la notation $<< a, b >>$ pour désigner le chemin de $a = (x_0, y_0)$ à $b = (x, y)$ constitué de deux segments, le premier parallèle à l'axe des x et le deuxième parallèle à l'axe des y. Si le point b est dans le disque $D(a; \rho)$ centré en a, alors le chemin $<< a, b >>$ est contenu dans $D(a; \rho)$.



Soit $z \in D$ on définie $F(z) := \int_{<<z_0,z>>} f(\xi)\, d\xi$.

On veut montrer que $F'(z) = f(z)$.

Fixons $z \in D$ et $\epsilon > 0$, comme D est ouvert et f continue en z, il existe $\delta > 0$ tel que le disque $D(z; \delta) \subset D$ et $|f(\xi) - f(z)| < \epsilon$ si $|\xi - z| < \delta$.

Soit $w \in D(z; \delta)$, alors le chemin $<< z, w >>$ est contenu dans $D(z; \delta)$ et donc dans D.
Les chemins $<< z_0, z >>$ et $<< z_0, w_0 >>$ sont aussi contenus dans D. Ces trois chemins engendrent un rectangle R contenu dans D. On peut écrire pour les deux configurations possibles :

$$\int_{<<z_0,z>>} f(z)\, dz \pm \int_{\partial R} f(z)\, dz + \int_{<<z,w>>} f(z)\, dz = \int_{<<z_0,w>>} f(z)\, dz \qquad (3.9)$$

D'après le théorème de Goursat $\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$, et par suite l'équation précédente devient :

$$F(z) + \int_{<<z,w>>} f(z)\,dz = F(w) \tag{3.10}$$

Comme chacun des côtes du triangle rectangle défini par $<< z, w >>$ n'est pas plus grand que l'hypothénus, qui est de longueur $|z-w|$, on en dduit que la longueur de $<< z, w >> \leq 2|z-w|$, d'où

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\Big| &= \frac{|F(w)-F(z)-(w-z)f(z)|}{|w-z|} \\
&= \frac{1}{|w-z|}\Big|\int_{<<z,w>>} f(\xi)\,d\xi - (w-z)f(z)\Big| \\
&= \frac{1}{|w-z|}\Big|\int_{<<z,w>>} f(\xi)\,d\xi - f(z)\int_{<<z,w>>} 1\,d\xi\Big| \\
&= \frac{1}{|w-z|}\Big|\int_{<<z,w>>} [f(\xi)-f(z)]\,d\xi\Big| \\
&\leq \frac{1}{|w-z|}\int_{<<z,w>>} |f(\xi)-f(z)|\,|d\xi| \\
&\leq \frac{1}{|w-z|}\epsilon.\text{longueur}(<< z,w >>) \leq \frac{1}{|w-z|}\epsilon.2|w-z| = 2\epsilon
\end{aligned} \tag{3.11}$$

D'où $\lim\limits_{w\longrightarrow z} \dfrac{F(w)-F(z)}{w-z} = f(z)$ et donc $F'(z) = f(z)$. Maintenant, comme f admet une primitive dans D et γ est un lacet on a, d'après le théorème 2.1.28, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$, ce qui établit le (ii) du théorème. ■

3ème étapes :

3.3.6 Théorème (Formule de Cauchy globale)

Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et Γ un lacet de Ω tel que $Int(\Gamma) \subset \Omega$.

Alors pour tout $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et pour tout $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$ on a

$$Ind_\Gamma(z).f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi. \tag{3.12}$$

Démonstration: Considérons la fonction g définie dans $\Omega \times \Omega$ par

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{si } z \neq w \\ f'(z) & \text{si } z = w \end{cases} \tag{3.13}$$

On remarquera que pour tout $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$, $\int_\Gamma g(z,\xi)\,d\xi = 0$ est équivalent à $Ind_\Gamma(z).f(z) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,d\xi$. On va alors montrer que pour tout $z \in \Omega \setminus \Gamma^*$, $\int_\Gamma g(z,\xi)\,d\xi = 0$.

3.3.8 LEMME

La fonction g est continue dans $\Omega \times \Omega$ et la fonction h définie par $h(z) := \int_\Gamma g(z, \xi)\, d\xi$ est une fonction holomorphe dans Ω.

Démonstration: (du lemme) Soit $(a, b) \in \Omega \times \Omega$.
Si $a \neq b$ alors dans un voisinage de (a, b), $g(z, w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z}$ donc holomorphe. supposons maintenant que $a = b$. Comme f est analytique dans Ω, il existe un disque $D(a; r) \subset \Omega$ tel que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n$ pour tout $z \in D(a; r)$. Alors pour $(z, w) \in D(a; r) \times D(a; r)$, $z \neq w$,
$g(z, w) = \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (w-a)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n}{w-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{(w-a)^n - (z-a)^n}{w-z}$
$= g(a, a) + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n q_n(w, z)$ où $q_n(w, z) = \sum_{j=1}^{n} (w-a)^{n-j} (z-a)^{j-1}$.
Comme $|q_n(w, z)| \leq n r^{n-1}$, il s'en suit que pour $0 < \epsilon \leq \frac{r}{2}$, $|w - a| < \epsilon$ et $|z - a| < \epsilon$ on a

$$|g(w, z) - g(a, a)| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} n |a_n| \epsilon^{n-1} \leq \epsilon \Big(\sum_{n=2}^{+\infty} n |a_n| \left(\frac{r}{2}\right)^{n-2} \Big)$$

par suite $\lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0} g(w, z) - g(a, a) = 0$, d'où la continuité de g.
Pour montrer que $h(z) = \int_\Gamma g(z, \xi)\, d\xi$ est holomorphe dans Ω, il suffit de montrer que pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe un disque $D(z_0; r) \subset \Omega$ tel que $\int_{\partial R} h(z)\, dz = 0$ pour tout rectangle $R \subset D(z_0, r)$. Mais, $R \times \Gamma^*$ est compact, g est uniformément continue dans $R \times \Gamma^*$ et d'après le théorème de Fubini

$$\int_{\partial R} h(z)\, dz = \int_{\partial R} \int_\Gamma g(z, \xi)\, d\xi\, dz = \int_\Gamma \int_{\partial R} g(z, \xi)\, dz\, d\xi.$$

Comme pour ξ fixé, l'application $\xi \mapsto g(z, \xi)$ est holomorphe dans Ω, on a d'après le théorème de Goursat $\int_{\partial R} g(z, \xi)\, dz = 0$, et par suite $\int_{\partial R} h(z)\, dz = 0$. Ce qui termine la preuve du Lemme.■

On va maintenant, montrer que h admet un prolongement en une fonction entière $\tilde{h}$ telle que $\lim_{|z| \longrightarrow +\infty} \tilde{h}(z) = 0$ et le théorème de Liouville va nous permetre de conclure. Posons $U := \{z \in \mathbb{C}; Ind_\Gamma(z) = 0\}$. Alors U est un ouvert de $\mathbb{C}$ et comme par hypothèse on a $Ind_\Gamma(z) = 0$ pour tout $z \notin \Omega$ on a $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset U$ et donc $\mathbb{C} = \Omega \cup U$. Soit h^* la fonction définie dans U par $h^*(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$. On va montrer que h^* est holomorphe dans U et que $\lim_{|z| \longrightarrow +\infty} h^*(z) = 0$. Pour montrer que h^* est holomorphe, on utilise la fonction auxiliaire $g^*(z, w) = \frac{f(w)}{w-z}$ et le lemme précédent. Maintenant, $|h^*(z)| \leq \max_{\xi \in \Gamma^*} \left| \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right| \lambda(\Gamma)$, Comme Γ^* est compact, on a $\max_{\xi \in \Gamma^*} |f(\xi)| < +\infty$ et $\max_{\xi \in \Gamma^*} \left| \frac{1}{\xi - z} \right| \leq \frac{1}{||z| - \max_{\xi \in \Gamma^*} |\xi||}$. Par suite $|h^*(z)| \leq \frac{1}{||z| - \max_{\xi \in \Gamma^*} |\xi||} . \max_{\xi \in \Gamma^*} |f(\xi)| . \lambda(\Gamma)$ d'où $\lim_{|z| \longrightarrow +\infty} h^*(z) = 0$. Si $z \in \Omega \cap U$ et $z \notin \Gamma^*$, alors $h(z) = \int_\Gamma g(z, \xi)\, d\xi = h(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi = \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi - f(z) \int_\Gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi$
$= h^*(z) - 2i\pi f(z) Ind_\Gamma(z) = h^*(z)$ car $Ind_\Gamma(z) = 0$. Par conséquent la fonction $\tilde{h}$ définie dans $\mathbb{C}$ par

$$\tilde{h}(z) = \begin{cases} h(z) & \text{si } z \in \Omega \\ h^*(z) & \text{si } z \in U \end{cases} \tag{3.14}$$

est une fonction entière telle que $\lim\limits_{|z|\longrightarrow+\infty} \tilde{h}(z) = 0$, d'après le théorème de Liouville (qui est une conséquence du Théorème de Cauchy-Goursat local) $\tilde{h}$ est identiquement nulle, d'où $\int_\Gamma g(z,\xi)\, d\xi = h(z) = 0$ pour tout $z \in \Omega$. ■

En résumé on a

3.3.10 THÉORÈME
Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$ et γ un lacet dans Ω.

Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Pour tout $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = 0$.

ii) Alors pour tout $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et pour tout $z \in \Omega \setminus \gamma^*$ on a

$$Ind_\gamma(z).f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi. \tag{3.15}$$

iii) $Int(\gamma) \subset \Omega$ i.e. $\displaystyle\int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - a} = 0$ pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Démonstration: .

$ii) \Rightarrow i)$ Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et z choisit arbitrairement dans $\Omega \setminus \gamma^*$ et on définit $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ par $g(\xi) = (\xi - z)f(\xi)$. Alors $ii)$ appliquée à g donne $0 = g(z) = \int_\gamma f(\xi)\, d\xi$.

$i) \Rightarrow iii)$ Si $\Omega = \mathbb{C}$ il n'y a rien à démontrer. On peut donc supposer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. On doit montrer que $Ind_\gamma(z_0) = 0$. soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ definie par $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$. Alors d'après $i)$, $0 = \int_\gamma f(z)\, dz = 2i\pi Ind_\gamma(z_0)$.

$iii) \Rightarrow ii)$ C'est le théorème précédent. ■